

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Teste — Semana 8 — 11 de Novembro de 2020
(CURSOS: LMAC, MEFT)

[5,0 val] 1. Indique, justificando, para que valores de $n \in \mathbb{N}$ existem primitivas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de

$$z^n \sin \frac{1}{z}.$$

2. Considere a função f definida pela série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i - z}{2i + z} \right)^n.$$

[4,0 val] (a) Determine, e esboce, o domínio de convergência desta série, isto é, os valores de $z \in \mathbb{C}$ para os quais a série converge.

[6,0 val] (b) Calcule o valor do integral

$$\oint_{|z|=1/3} \frac{f''''(z)}{z^4} dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

Sugestão: Use o desenvolvimento em série de MacLaurin da função f .

[5,0 val] 3. Obtenha o valor do integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{(e^{-z} - 1 + z)^2}{(1 - \cos z)(\sin z)^3} dz,$$

em que a curva é percorrida uma vez no sentido directo.